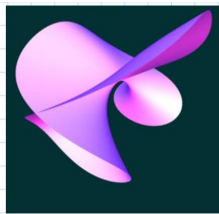
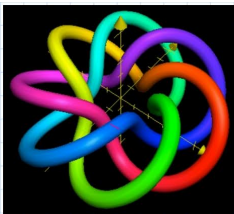


De ecuaciones e integrales a la Teoría de Hodge

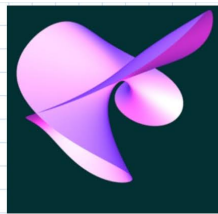
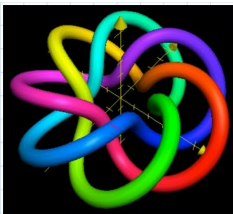
Jorge Duque

Coloquio del Departamento de Matemáticas, Universidad de La Serena

March 5, 2026



$$x^3 + x^2z^2 - y^2 = 0$$



$$x^3 + x^2z^2 - y^2 = 0$$

Conjetura de Hodge

La conjetura de Hodge pregunta bajo qué condiciones un espacio con una forma arbitraria resulta ser, en realidad, uno que puede describirse mediante ecuaciones polinomiales.

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

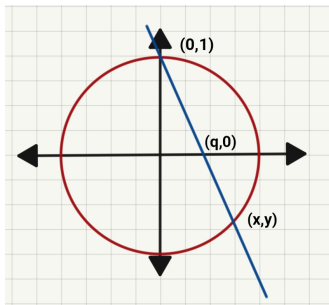
$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

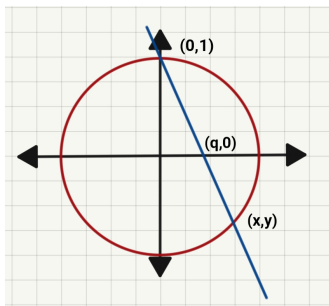


Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Circulo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

$$q = \frac{u}{v}, \quad u, v \in \mathbb{Z}, (u, v) = 1$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

$$q = \frac{u}{v}, \quad u, v \in \mathbb{Z}, (u, v) = 1$$

$$(x, y) = \left(\frac{2uv}{u^2 + v^2}, \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \right)$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

$$q = \frac{u}{v}, \quad u, v \in \mathbb{Z}, (u, v) = 1$$

$$(x, y) = \left(\frac{2uv}{u^2 + v^2}, \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \right)$$

$$(a, b, c) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$$

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente**

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d ,

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

$$d = 6, (a, b, c) = (3, 4, 5)$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

$$d = 5, (a, b, c) = \left(\frac{3}{2}, \frac{20}{3}, \frac{41}{6} \right)$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes?

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} \iff \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\}$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{aligned} \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d \right\} &\iff \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d) \right\} \\ (a, b, c) &\implies \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a} \right) \end{aligned}$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{array}{ccc} \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} & \iff & \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\} \\ (a, b, c) & \implies & \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a}\right) \\ \left(\frac{x^2-d^2}{y}, \frac{2dx}{y}, \frac{x^2+d^2}{y}\right) & \longleftarrow & (x, y) \end{array}$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{aligned} \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} &\iff \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\} \\ (a, b, c) &\implies \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a}\right) \\ \left(\frac{x^2-d^2}{y}, \frac{2dx}{y}, \frac{x^2+d^2}{y}\right) &\longleftarrow (x, y) \end{aligned}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Número congruente

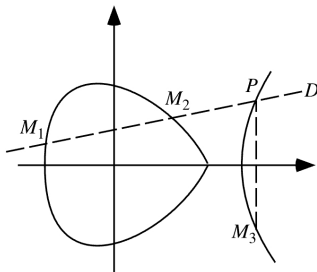
Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{array}{ccc} \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} & \iff & \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\} \\ (a, b, c) & \implies & \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a}\right) \\ \left(\frac{x^2-d^2}{y}, \frac{2dx}{y}, \frac{x^2+d^2}{y}\right) & \longleftarrow & (x, y) \end{array}$$

$y^2 = p(x)$, $\deg(p) = 3$, $p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow$ **Curva elíptica**



$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \textbf{Curva elíptica}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones?

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene?

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = p(x), \deg(p) = 3, p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = x(x-5)(x+5) \text{ infinitas soluciones}$$

$$y^2 = p(x), \deg(p) = 3, p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = x(x-5)(x+5) \text{ infinitas soluciones}$$

Pregunta: ¿Podemos parametrizarlas?

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

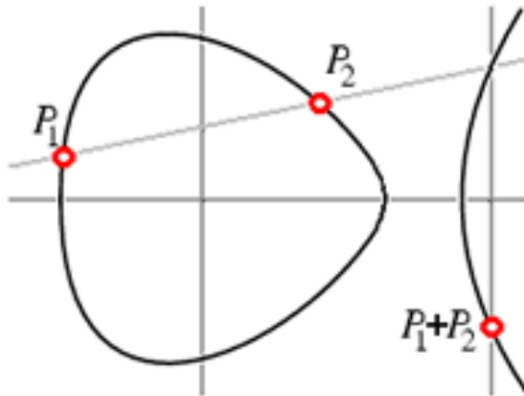
Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

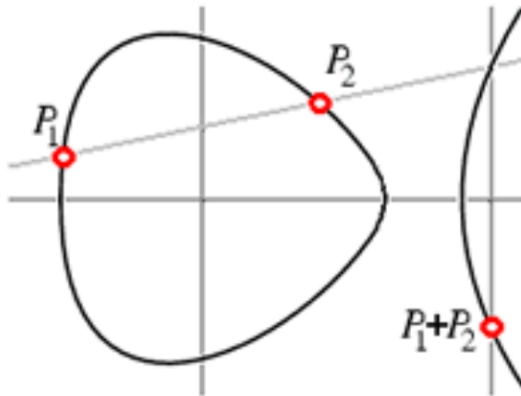
$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = x(x-5)(x+5) \text{ infinitas soluciones}$$

Pregunta: ¿Podemos parametrizarlas? **NO!**

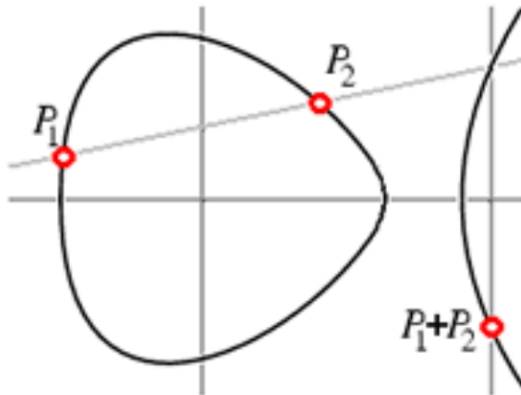


Theorem (Teorema de Mordell-Weil)



Theorem (Teorema de Mordell-Weil)

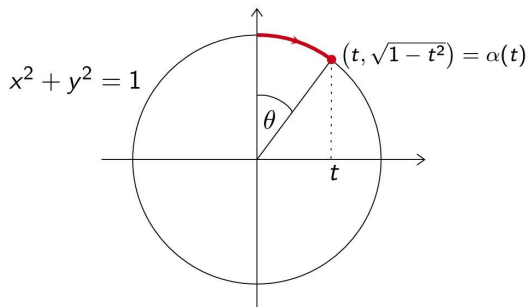
Las soluciones racionales de una curva elíptica forman un grupo abeliano finitamente generado.

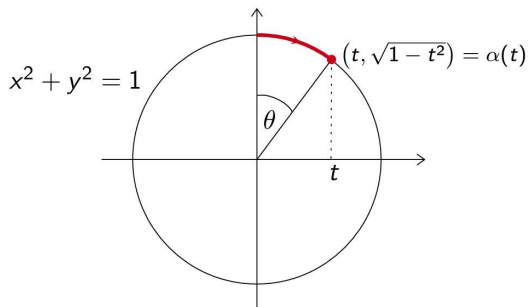


Theorem (Teorema de Mordell-Weil)

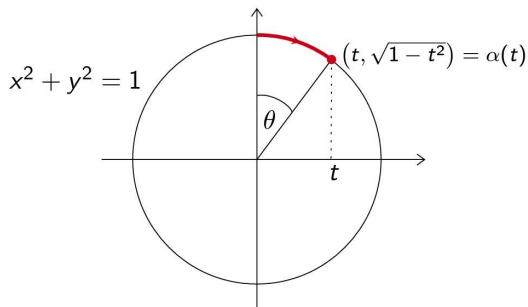
Las soluciones racionales de una curva elíptica forman un grupo abeliano finitamente generado.

$$E(\mathbb{Q}) \simeq G \oplus \mathbb{Z}^r, G \text{ finito}$$

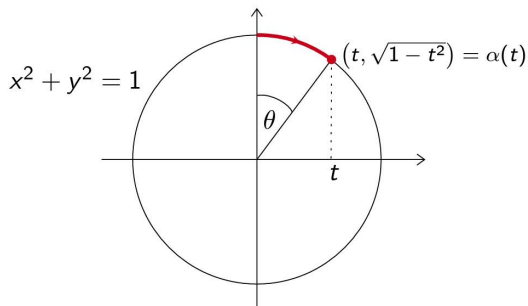




$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx =$$

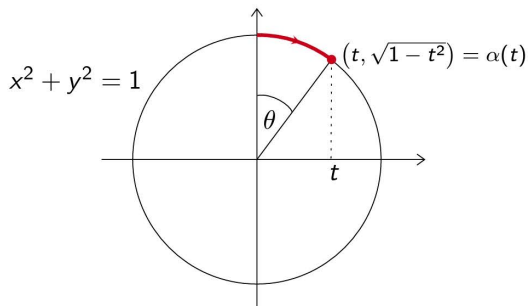


$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \left| \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right| dx$$



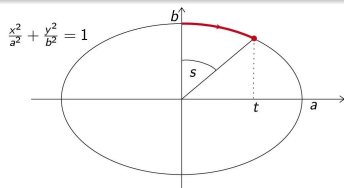
$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \left| \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right| dx$$

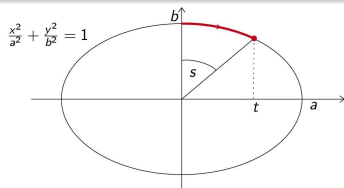
$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$



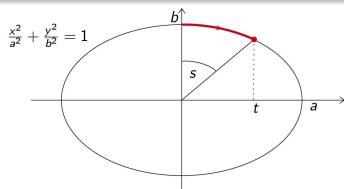
$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \left| \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right| dx$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(t)$$



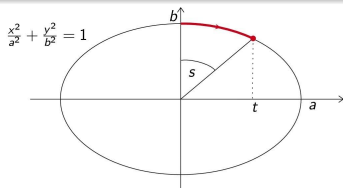


$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$



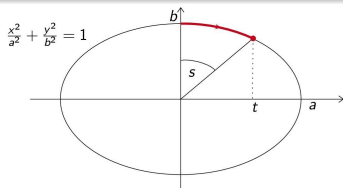
$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx$$



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

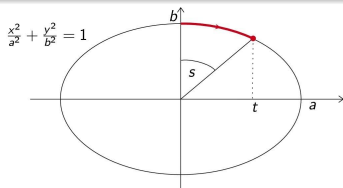
$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

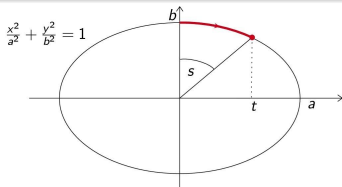
Pregunta: Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)?



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

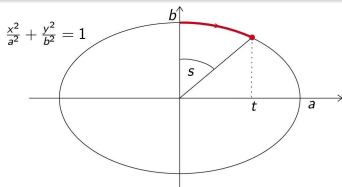


$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

Integrales **Elípticas/Abelianas**:



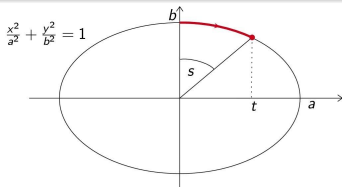
$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

Integrales **Elípticas/Abelianas**:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}, \quad \deg(p) = 3, 4$$



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

Integrales **Elípticas/Abelianas**:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}, \quad \deg(p) = 3, 4$$

$$\int R(x, w) dx, \quad F(x, w) = 0$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\sqrt{p(x)} = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{p'(x) dx}{p(x)}\right)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\sqrt{p(x)} = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{p'(x) dx}{p(x)}\right)$$

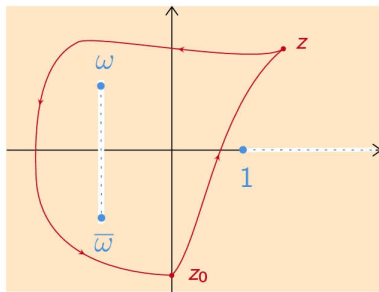
Ejemplo: $p(z) = 1 - z^3$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

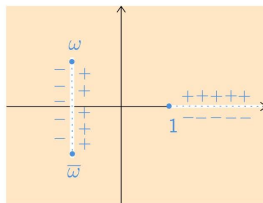
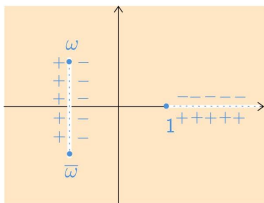
$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\sqrt{p(x)} = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{p'(x) dx}{p(x)}\right)$$

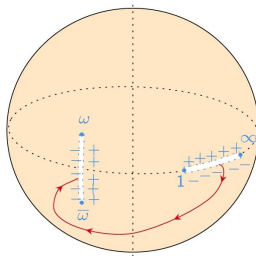
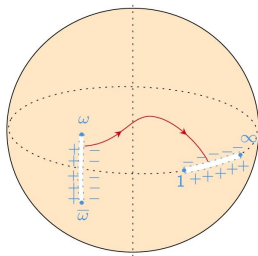
Ejemplo: $p(z) = 1 - z^3$



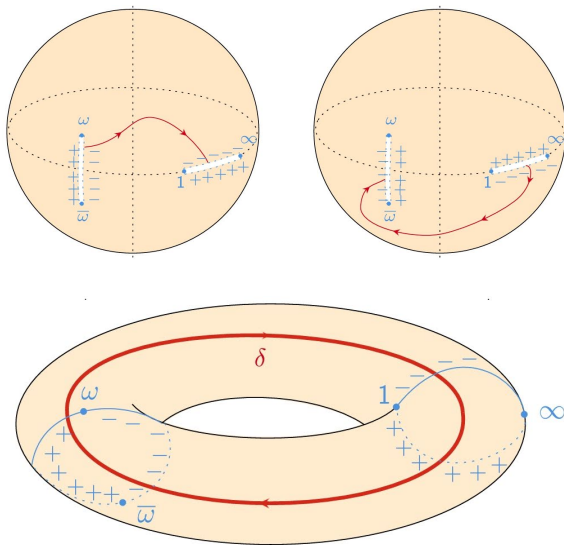
Hacia las superficies de Riemann



Hacia las superficies de Riemann

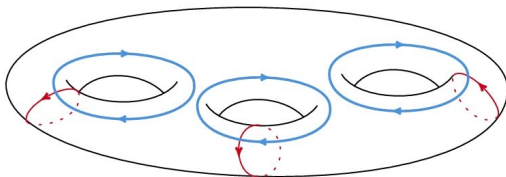


Hacia las superficies de Riemann

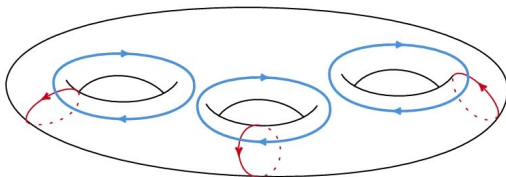


En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}$ es

En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}$ es

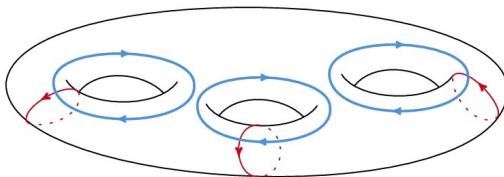


En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}$ es



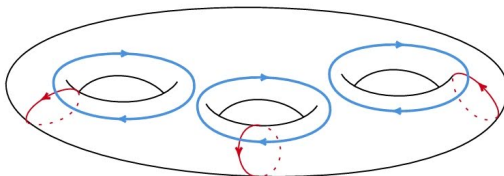
El número de integrales independientes es $2g$,

En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}$ es

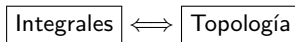


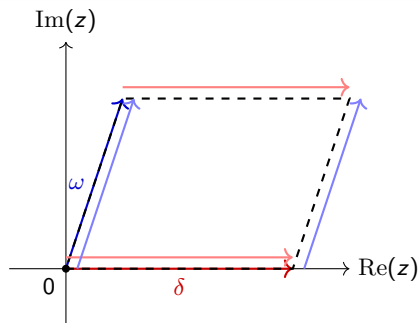
El número de integrales independientes es $2g$, donde g es el **género** de la superficie de Riemann

En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}$ es



El número de integrales independientes es $2g$, donde g es el **género** de la superficie de Riemann





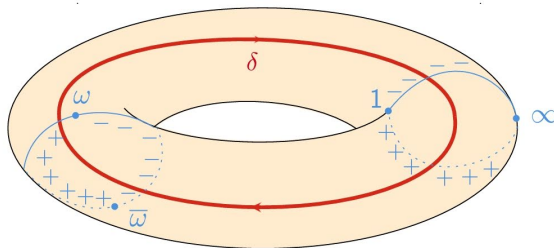
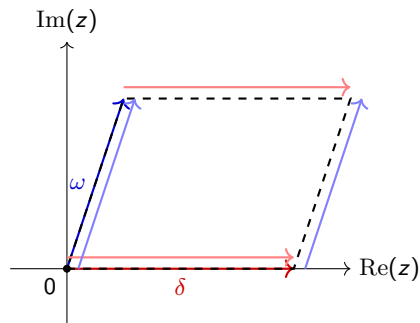
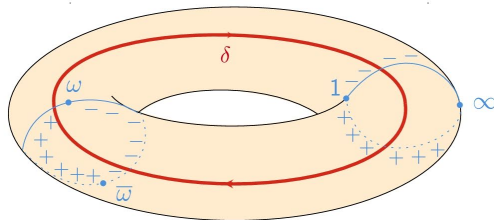
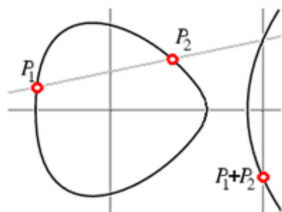


Figure: $T = \mathbb{C}/\Lambda$

¿Curva elíptica o toro complejo? ¡Es lo mismo!



$$\Lambda = \delta \cdot \mathbb{Z} \oplus \omega \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbf{Reticulado}$$

$$\Lambda \simeq 1 \cdot \mathbb{Z} \oplus \frac{\omega}{\delta} \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbf{Reticulado}$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \textbf{Reticulado}$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \textbf{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \textbf{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \text{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \text{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow (1, 0) \cdot \mathbb{C} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \textbf{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \textbf{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \simeq \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C} \oplus \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \textbf{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \textbf{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \simeq \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C} \oplus \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}$$

$$H^{1,0} := \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C}, \quad H^{0,1} := \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \textbf{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \textbf{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \simeq \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C} \oplus \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}$$

$$H^{1,0} := \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C}, \quad H^{0,1} := \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$$

$$\Lambda \hookrightarrow H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \text{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \text{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \simeq \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C} \oplus \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}$$

$$H^{1,0} := \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C}, \quad H^{0,1} := \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$$

$$\Lambda \hookrightarrow H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

$$(1, 0) = \frac{1}{2}(1, i) + \frac{1}{2}(1, -i)$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \textbf{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \textbf{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \simeq \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C} \oplus \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}$$

$$H^{1,0} := \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C}, \quad H^{0,1} := \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$$

$$\Lambda \hookrightarrow H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

$$(1, 0) = \frac{1}{2}(1, i) + \frac{1}{2}(1, -i)$$

$$(a, b) = \bar{\tau} \frac{1}{2}(1, i) + \tau \frac{1}{2}(1, -i), \quad \tau = a + ib$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \textbf{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \textbf{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \simeq \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C} \oplus \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}$$

$$H^{1,0} := \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C}, \quad H^{0,1} := \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$$

$$\Lambda \hookrightarrow H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \hookrightarrow & H^{1,0} \oplus H^{0,1} \\ & \searrow \pi_{1,0} & \downarrow \pi_{1,0} \\ & & H^{1,0} \end{array}$$

$$\Lambda \simeq (1, 0) \cdot \mathbb{Z} \oplus (a, b) \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \text{Reticulado}$$

$$T \simeq \mathbb{C}/\Lambda \rightsquigarrow \text{Toro Complejo}$$

$$\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \simeq \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C} \oplus \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}$$

$$H^{1,0} := \frac{1}{2}(1, i) \cdot \mathbb{C}, \quad H^{0,1} := \frac{1}{2}(1, -i) \cdot \mathbb{C}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$$

$$\Lambda \hookrightarrow H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \hookrightarrow & H^{1,0} \oplus H^{0,1} \\ & \searrow \pi_{1,0} & \downarrow \pi_{1,0} \\ & & H^{1,0} \end{array}$$

$$T \simeq \frac{H^{1,0}}{\pi_{1,0}(\Lambda)} \simeq \frac{H^{1,0}}{\Lambda}$$

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Ejemplo:

Estructura de Hodge

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complexificación

Ejemplo:

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complexificación

$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

Ejemplo:

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complexificación

$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H^{q,p}} = H^{p,q}$$

Ejemplo:

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complejificación

$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H^{q,p}} = H^{p,q}$$

Ejemplo:

$$\{\text{Toro complejo } T = \mathbb{C}^g / \Lambda\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\Lambda \text{ Estructura de Hodge de peso } 1\}$$

Estructura de Hodge

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complejificación

$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H^{q,p}} = H^{p,q}$$

Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Toro complejo } T = \mathbb{C}^g / \Lambda \\ H^{1,0} / \Lambda \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftarrow \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \text{ Estructura de Hodge de peso 1} \\ \Lambda \end{array} \right\}$$

Estructura de Hodge

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complexificación

$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H^{q,p}} = H^{p,q}$$

Ejemplo:

$\{\text{Toro complejo } T = \mathbb{C}^g / \Lambda\}$	$\Longleftrightarrow$	$\{\Lambda \text{ Estructura de Hodge de peso } 1\}$
$H^{1,0} / \Lambda$	$\Longleftarrow$	Λ
$\mathbb{C}^g / \Lambda$	$\Longrightarrow$	$\Lambda_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$

Estructura de Hodge

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complexificación

$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H^{q,p}} = H^{p,q}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Toro complejo } T = \mathbb{C}^g / \Lambda\} & \Longleftrightarrow & \{\Lambda \text{ Estructura de Hodge de peso } 1\} \\ \begin{array}{c} H^{1,0} / \Lambda \\ \mathbb{C}^g / \Lambda \end{array} & \begin{array}{c} \Longleftarrow \\ \Longrightarrow \end{array} & \begin{array}{c} \Lambda \\ \Lambda_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1} \end{array} \\ J : \Lambda_{\mathbb{R}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}} & & \end{array}$$

Estructura de Hodge

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complexificación

$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H^{q,p}} = H^{p,q}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Toro complejo } T = \mathbb{C}^g / \Lambda\} & \Longleftrightarrow & \{\Lambda \text{ Estructura de Hodge de peso } 1\} \\ \begin{array}{c} H^{1,0} / \Lambda \\ \mathbb{C}^g / \Lambda \end{array} & \begin{array}{c} \Longleftarrow \\ \Longrightarrow \end{array} & \begin{array}{c} \Lambda \\ \Lambda_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1} \end{array} \\ J : \Lambda_{\mathbb{R}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}} & & H^{1,0} := \{v \in \Lambda_{\mathbb{C}} \mid J(v) = i \cdot v\} \end{array}$$

Estructura de Hodge

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definition

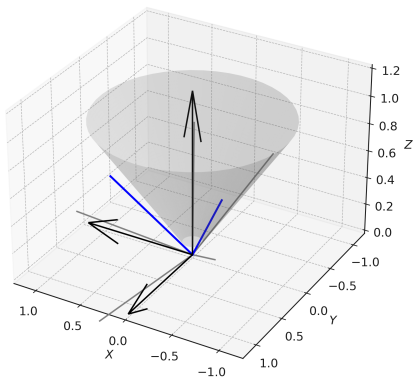
Sea Λ un reticulado. Una estructura de Hodge de peso k en Λ es una descomposición de suma directa de su complexificación

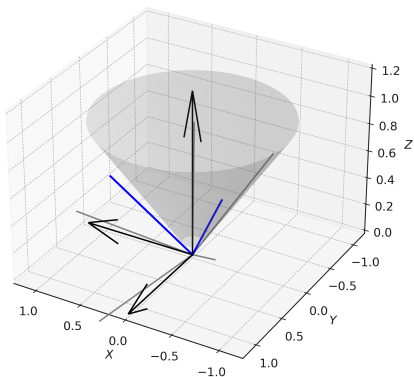
$$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H^{q,p}} = H^{p,q}$$

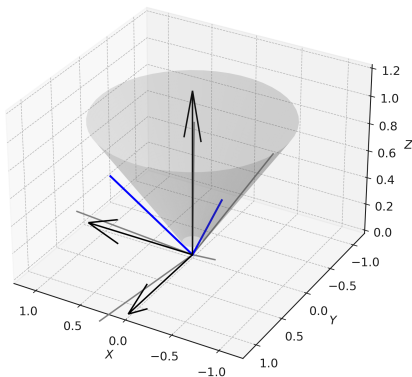
Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Toro complejo } T = \mathbb{C}^g / \Lambda\} & \Longleftrightarrow & \{\Lambda \text{ Estructura de Hodge de peso } 1\} \\ H^{1,0} / \Lambda & \Longleftarrow & \Lambda \\ \mathbb{C}^g / \Lambda & \Longrightarrow & \Lambda_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1} \\ J : \Lambda_{\mathbb{R}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}} & & H^{1,0} := \{v \in \Lambda_{\mathbb{C}} \mid J(v) = i \cdot v\} \\ & & H^{0,1} := \{v \in \Lambda_{\mathbb{C}} \mid J(v) = -i \cdot v\} \end{array}$$





$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad x \sim y \iff x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}^*$$



$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad x \sim y \iff x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}^*$$

$$X = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\} \subseteq P^n \quad f_i \text{ Polinomios homogéneos}$$

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n .

Theorem (Torelli)

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para cada $0 \leq k \leq 2n$, existe un reticulado Λ^k con una estructura de Hodge de peso k :

Theorem (Torelli)

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para cada $0 \leq k \leq 2n$, existe un reticulado Λ^k con una estructura de Hodge de peso k :

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k := \Lambda^k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H_k^{p,q} \rightsquigarrow \textbf{Descomposición de Hodge}$$

Theorem (Torelli)

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para cada $0 \leq k \leq 2n$, existe un reticulado Λ^k con una estructura de Hodge de peso k :

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k := \Lambda^k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H_k^{p,q} \rightsquigarrow \textbf{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H_k^{p,q}} = H_k^{q,p}$$

Theorem (Torelli)

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para cada $0 \leq k \leq 2n$, existe un reticulado Λ^k con una estructura de Hodge de peso k :

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k := \Lambda^k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H_k^{p,q} \rightsquigarrow \textbf{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H_k^{p,q}} = H_k^{q,p}$$

Theorem (Torelli)

- *Dos curvas suaves compactas complejas son isomorfas*

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para cada $0 \leq k \leq 2n$, existe un reticulado Λ^k con una estructura de Hodge de peso k :

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k := \Lambda^k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H_k^{p,q} \rightsquigarrow \textbf{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H_k^{p,q}} = H_k^{q,p}$$

Theorem (Torelli)

- *Dos curvas suaves compactas complejas son isomorfas si y solo si existe un isomorfismo entre sus **estructuras de Hodge** (polarizadas) de peso 1.*

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para cada $0 \leq k \leq 2n$, existe un reticulado Λ^k con una estructura de Hodge de peso k :

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k := \Lambda^k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H_k^{p,q} \rightsquigarrow \textbf{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H_k^{p,q}} = H_k^{q,p}$$

Theorem (Torelli)

- Dos curvas suaves compactas complejas son isomorfas si y solo si existe un isomorfismo entre sus **estructuras de Hodge** (polarizadas) de peso 1.
- Dos superficies K3 (i.e. superficies complejas compactas, simplemente conexas, cuyo espacio de 2-formas holomorfas globales está generado por una única forma holomorfa no degenerada) son isomorfas

Theorem (Descomposición de Hodge)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para cada $0 \leq k \leq 2n$, existe un reticulado Λ^k con una estructura de Hodge de peso k :

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k := \Lambda^k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H_k^{p,q} \rightsquigarrow \text{Descomposición de Hodge}$$

$$\overline{H_k^{p,q}} = H_k^{q,p}$$

Theorem (Torelli)

- Dos curvas suaves compactas complejas son isomorfas si y solo si existe un isomorfismo entre sus **estructuras de Hodge** (polarizadas) de peso 1.
- Dos superficies K3 (i.e. superficies complejas compactas, simplemente conexas, cuyo espacio de 2-formas holomorfas globales está generado por una única forma holomorfa no degenerada) son isomorfas si y solo si existe un isomorfismo entre sus **estructuras de Hodge** de peso 2 respetando el producto de intersección.

Theorem ((1,1) de Leshetz)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n .

Conjetura de Hodge

Theorem ((1,1) de Leshetz)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para $k = 2$ se tiene $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 = H_2^{2,0} \oplus H_2^{1,1} \oplus H_2^{0,2}$ y se cumple que

Conjetura de Hodge

Theorem ((1,1) de Leshetz)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para $k = 2$ se tiene $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 = H_2^{2,0} \oplus H_2^{1,1} \oplus H_2^{0,2}$ y se cumple que

$$\delta \in \Lambda^2 \cap H_2^{1,1} \iff$$

Conjetura de Hodge

Theorem ((1,1) de Leshetz)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para $k = 2$ se tiene $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 = H_2^{2,0} \oplus H_2^{1,1} \oplus H_2^{0,2}$ y se cumple que

$$\delta \in \Lambda^2 \cap H_2^{1,1} \iff \delta = \sum n_j Y_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad Y_j \subset X \text{ Sub. algebraica de codim. } 1.$$

Conjetura de Hodge

Theorem ((1,1) de Leshetz)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para $k = 2$ se tiene $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 = H_2^{2,0} \oplus H_2^{1,1} \oplus H_2^{0,2}$ y se cumple que

$$\delta \in \Lambda^2 \cap H_2^{1,1} \iff \delta = \sum n_j Y_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad Y_j \subset X \text{ Sub. algebraica de codim. } 1.$$

Conjetura de Hodge

$$\delta \in \Lambda^{2k} \cap H_{2k}^{k,k} \iff$$

Theorem ((1,1) de Leshetz)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva suave de dimensión n . Para $k = 2$ se tiene $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 = H_2^{2,0} \oplus H_2^{1,1} \oplus H_2^{0,2}$ y se cumple que

$$\delta \in \Lambda^2 \cap H_2^{1,1} \iff \delta = \sum n_j Y_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad Y_j \subset X \text{ Sub. algebraica de codim. } 1.$$

Conjetura de Hodge

$$\delta \in \Lambda^{2k} \cap H_{2k}^{k,k} \iff \delta = \sum n_j Y_j, \quad n_j \in \mathbb{Q}, \quad Y_j \subset X \text{ Sub. algebraica de codim. } k.$$

